MA1 – příklady (globální extrémy funkce) k přednášce 13.11.2019

„Návod" k vyšetření globálních extrémů funkce:

„Jediné, co víme":

Věta. f spojitá na $\langle a,b \rangle \Rightarrow$ f nabývá na $\langle a,b \rangle$ svých globálních extrémů (tj. globálního maxima i globálního minima.

„Postup" při hledání globálních extrémů (v D_f):

(1) najdeme hodnoty v bodech kritických pro lokální extrém (neboť, je-li v bodě $x_0 \in D_f$ globální extrém fce, je zde i lokální, pokud je f definována v $U(x_0)$)

(2) pokud jsou v D_f i krajní body intervalů z D_f, pak určíme hodnoty fce v těchto „krajních" bodech příslušných intervalů

(3) pokud „krajní body" intervalů nejsou body z D_f, určíme (spočítáme) zde limity (tedy – vyšetříme i existenci limity)

Pak: Je-li největší z hodnot (předpokládáme, že v (1), (2), (3) je konečný počet bodů) v (1) nebo (2), je to globální maximum. Je-li největší z hodnot limita, pak funkce globální maximum nenabývá.
Analog. pro globální minimum.

Příklad 1. (z geometrie)

Najděte na parabole o rovnici $y = x^2$ bod nejbližší bodu $A[6,3]$.

Lze řešit i pomocí analytické geometrie, my si chceme užít „extrémy" funkce.

$A[6,3]$ není bodem paraboly;
budeme hledat minimum vzdálenosti bodu $A[6,3]$ od bodů paraboly $X[x,x^2]$ pro $x \in R$:

$$d(A,X) = \sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2} \quad (= f(x)), \quad x \in R$$

a hledáme minimum – z „úvodu" (stačí minimum fce $f^2(x)$)

1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f^2(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left((x-6)^2 + (x^2-3)^2\right) = +\infty$

2) funkce je spojitá, ex. $f'(x)$ v R, tedy hledáme stacionární body $f^2(x)$ a hodnoty v nich:

$$(f^2(x))' = 2(x-6) + 2(x^2-3) \cdot 2x = 2(2x^3 - 5x - 6)$$

$(f^2(x))' = 0$ pro $x = 2$ („pokusem"), pak

$$f^2(x) = 2(x-2)(2x^2+4x+3), \quad \text{tj. } f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

(jediný stac. bod – zde je asi „minimum")

$(f^2)'$	$-$		$+$
f^2	$\searrow$	2	$\nearrow$

tj. v bodě $x=2$ je ostré lok. minimum, tedy i globální

tj. nejbližší bod na parabole k bodu $A[6,3]$ je bod $\underline{B[2,4]}$, a $\underline{d(A,B)} = \sqrt{(2-6)^2 + (3-4)^2} = \underline{\sqrt{17}}$

<u>Příklad 2.</u> (ze „života")

Máme udělat (třeba pro zahradu) sud – válec – daného objemu V s nejmenším povrchem (bez víka)

<u>Rozměry válce</u>: r – poloměr, v – výška

1) r, v nejsou nezávislé veličiny, neboť je dán objem $V = \pi r^2 v \Rightarrow v = \dfrac{V}{\pi r^2}$, pokud je dán $\underline{\underline{r}}$

2) pak povrch (bez víka) $P(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$,

$r \in (0, +\infty)$

<u>Hledáme minimum funkce $P(r)$ na intervalu $(0,+\infty)$:</u>

(nevíme, zda existuje), ale –

$$\lim_{r\to 0+} P(r) = \lim_{r\to 0+}\Big(\underbrace{\pi r^2}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2V}{r}}_{\to\infty}\Big) = +\infty, \text{ stejně}$$

$$\lim_{r\to +\infty} P(r) = \lim\Big(\underbrace{\pi r^2}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{2V}{r}}_{\to 0}\Big) = +\infty,$$

f je spojitá a $P(r) > 0$ v $(0,+\infty)$, tedy bude minimum existovat; –

hledáme stacionární body:

$$P'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2}, \quad P'(r) = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{\pi},$$

tj. $\underline{r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}}$

pro $r^3 > \frac{V}{\pi}$ je $P'(r) > 0$, tj. P roste v $P_+(r_0)$

pro $r^3 < \frac{V}{\pi}$ je $P'(r) < 0$, tj. P klesá v $P_-(r_0)$

tj. <u>v bodě $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ je ostré lokální i globální minimum</u>

$$\Big(P_{min} = P(r_0) = 3 \cdot \sqrt[3]{\pi V^2}, \quad v_{min} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \Big)$$

Příklad 3 (z fyziky a VŠCHT)

Kapka vody padá volným pádem (bez odporu vzduchu) a vypařuje se konstantní rychlostí (padá z dostatečné výšky) – kdy bude maximální její kinetická energie?

$m(t) = m_0 - kt$, m_0 – počáteční hmotnost, $k > 0$

$m(t) \geq 0$, tj. $t \in \langle 0, \frac{m_0}{k} \rangle$

$v(t) = g \cdot t$

$E(t) = \frac{1}{2} m v^2$, tj. zde

$E(t) = \frac{1}{2}(m_0 - kt) \cdot g^2 t^2$, a hledáme maximum na intervalu $\langle 0, \frac{m_0}{k} \rangle$ – z „teorie" plyne, že funkce $E(t)$ zde globální maximum nabývá. ($E(t)$ je spojitá v $\langle 0, \frac{m_0}{k} \rangle$)

1) $E(0) = E\left(\frac{m_0}{k}\right) = 0$ – zde „není" glob. max ($E(t) > 0$ v $(0, \frac{m_0}{k})$)

2) vyšetříme stacionární body v $(0, \frac{m_0}{k})$

$$E'(t) = \frac{1}{2} g^2 (m_0 t^2 - k t^3)' = \frac{1}{2}(2 m_0 t - 3 k t^2) = 0$$

$\iff t = 0$ (nehodí se) $\vee$ $t = \frac{2}{3}\frac{m_0}{k}$ $\left(\in (0, \frac{m_0}{k})\right)$

a tento bod „musí" být t_{max} (tj. bod, kde $E(t)$ nabývá glob. maxima.

Pak: $$E_{max} = \frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{2}{3} m_0\right) \cdot g^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{m_0^2}{k^2} = \frac{2}{27}\frac{m_0^3}{k^2}$$

a $m(t_{max}) = m_0 - k \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{m_0}{k} = \frac{1}{3} m_0$

(„max $E(t)$ je při $1/3$ hmotnosti a $2/3$ času")

Příklad 4 (z chemie)

Částic neodelení hmotnosti m o rychlosti v je dána

$$f(v) = Kv^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$ ($K, k > 0$ konstanty, T - abs. teplota).

$v \in (0, +\infty)$

pro $v \to 0+$ a $v \to +\infty$ $f(v) \to 0$

$$\Big(\lim_{v \to 0+} f(v) = \lim_{v \to 0} \underbrace{Kv^2}_{\to 0} \underbrace{e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}_{\to 1} \Big) = 0,$$

$$\lim_{v \to +\infty} f(v) = \lim_{v \to +\infty} K \cdot \frac{v^2}{e^{\frac{mv^2}{2kT}}} = 0$$ (l'H. + VLSF)

$f(v) > 0$, spojitá, maximum bude v $(0, +\infty)$ existovat:

stac. body:

$$f'(v) = e^{-\frac{mv^2}{2kT}} Kv \left(2 - \frac{v^2 m}{kT}\right),$$

$$f'(v) = 0 \iff v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$ - zde $f(v)$ má globální maximum

Příklad 5 (z „matematiky")

Ukažte, že pro v. $x \in R$ platí: $e^x \geq x + 1$:

$g(x) = e^x - (x+1)$ 1) g je spojitá v R, $\lim_{x \to +\infty} (e^x - (x+1)) = +\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x - (x+1)\right) = +\infty$$

(vyjádřel: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - (x+1)\right) \underset{''}{=} 0 - (-\infty)'' \underset{AL}{=} +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - (x+1)\right) \underset{''}{=} \infty - \infty'' =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{x+1}{e^x}\right) \underset{''}{=} \infty \left(1 - 0''\right) \infty \ )$$

Dále – stacionární body:

$g'(x) = e^x - 1$, $g'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$

zde „musí" být globální minimum

(již zde lokální – $g'(x) < 0$ pro $x < 0$ a $g'(x) > 0$ pro $x > 0$,
tj. $g \searrow$ v $(-\infty, 0)$ a $g \nearrow$ v $(0, +\infty)$,

$g(0) = 0$, tj. pro všechna $x \in R$ platí, že
$g(x) \geqq 0$, tj. $e^x - (x+1) \geqq 0$, tj.

$$\underline{e^x \geqq x+1}$$

(což jsme měli dokázat)